<https://studylib.ru/doc/4784122>

презентация

ТЕОРИЯ

**Квадратные уравнения.**

Квадратным уравнением называют уравнение вида ***ах²+bх+с=0***, где коэффициенты ***а, b, с*** - любые действительные числа, причём, ***а≠0***. Коэффициенты ***а, b, с,*** различают по названиям: ***а*** - первый или старший коэффициент; ***b*** - второй или коэффициент при х; ***с*** - свободный член, свободен от переменной х.

Квадратное уравнение также называют уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

Квадратное уравнение называют ***приведенным***, если старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют ***неприведенным***, если старший коэффициент отличен от 1.

***х²+рх+q=0*** - стандартный вид приведенного квадратного уравнения

Кроме приведенных и неприведенных квадратных уравнений различают также ***полные*** и ***неполные*** уравнения.

***Полное квадратное уравнение*** – это квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты **b** и ***с*** *отличны* от нуля.

***Неполное квадратное уравнение*** – это уравнение, в котором присутствуют не все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов ***b*** и ***с*** *равен* нулю.

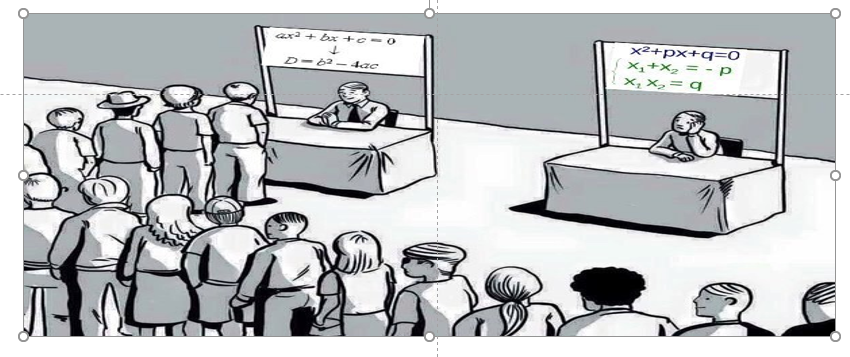
Обратите внимание: об ***ах²*** речи нет, этот член всегда присутствует в квадратном уравнении.

Корнем квадратного уравнения ***ах²+вх+с=0*** называют всякое значение переменной х, при котором квадратный трехчлен *ах²+bх+с* обращается в нуль; такое значение переменной х называют также корнем квадратного трехчлена.

Можно сказать и так: корень квадратного уравнения ***ах²+bх+с=0*** – это такое значение х, подстановка которого в уравнение обращает уравнение в верное числовое равенство. ***0=0***.

***Решить квадратное уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.***

Способы решения квадратного уравнения.



1. Решение квадратных уравнений по формуле.
2. Разложение левой части уравнения на множители.
3. По теореме Виета.
4. Метод выделения полного квадрата.
5. Графический способ решения квадратных уравнений.
6. Применение свойств коэффициентов квадратного уравнения.
7. Решение квадратных уравнений способом «переброски» старшего коэффициента.
8. Способ, основанный на закономерности коэффициентов.
9. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.
10. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.
11. Геометрический способ решения квадратных уравнений.
12. По теореме Безу.

Или

1. Разложение левой части уравнения на множители

2. Метод выделения полного квадрата

3. Решение квадратных уравнений по формулам

4. Решение уравнений с использованием теоремы Виета

5. Решение уравнений способом «переброски»

6. Свойства коэффициентов квадратного уравнения (частные случаи)

7. Графическое решение квадратного уравнения

8. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

9. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

10. Геометрический способ решения квадратных уравнений

Прежде, чем изучать конкретные методы решения, заметим, что все квадратные уравнения можно условно разделить на три класса:

* Не имеют корней;
* Имеют ровно один корень;
* Имеют два различных корня.

В этом состоит важное отличие квадратных уравнений от линейных, где корень всегда существует и единственен. Как определить, сколько корней имеет уравнение? Для этого существует замечательная вещь — ***дискриминант***.

**Дискриминант**

Пусть дано квадратное уравнение ***ax2 + bx + c = 0.*** Тогда ***дискриминант*** — это просто число ***D = b2 − 4ac***.

Эту формулу надо знать наизусть. Откуда она берется — сейчас неважно. Важно другое: по знаку дискриминанта можно определить, сколько корней имеет квадратное уравнение. А именно:

* Если D < 0, корней нет;
* Если D = 0, есть ровно один корень;
* Если D > 0, корней будет два.

Обратите внимание: дискриминант указывает на количество корней, а вовсе не на их знаки, как почему-то многие считают. Взгляните на примеры — и сами все поймете:

*Задача.* Сколько корней имеют квадратные уравнения:

***х2 − 8x + 12 = 0;***

***5x2 + 3x + 7 = 0;***

***х2 − 6x + 9 = 0.***

Выпишем коэффициенты для первого уравнения и найдем дискриминант:

***a = 1, b = −8, c = 12;***

D = (−8)2 − 4 · 1 · 12 = 64 − 48 = 16

Итак, *дискриминант положительный*, поэтому *уравнение имеет два различных корня*. Аналогично разбираем второе уравнение:

***a = 5; b = 3; c = 7;***

D = 32 − 4 · 5 · 7 = 9 − 140 = −131.

*Дискриминант отрицательный, корней нет.*

Осталось последнее уравнение:

***a = 1; b = −6; c = 9;***

D = (−6)2 − 4 · 1 · 9 = 36 − 36 = 0.

*Дискриминант равен нулю — корень будет один.*

Обратите внимание, что для каждого уравнения были выписаны коэффициенты. Да, это долго, да, это нудно — зато вы не перепутаете коэффициенты и не допустите глупых ошибок. Выбирайте сами: скорость или качество.

Кстати, если «набить руку», через некоторое время уже не потребуется выписывать все коэффициенты. Такие операции вы будете выполнять в голове. Большинство людей начинают делать так где-то после 50-70 решенных уравнений — в общем, не так и много.

**Корни квадратного уравнения**

Теперь перейдем, собственно, к решению. Если дискриминант D > 0, корни можно найти по формулам:

;

*Основная формула корней квадратного уравнения*

Когда ***D = 0***, можно использовать любую из этих формул — получится одно и то же число, которое и будет ответом. Наконец, если ***D < 0***, корней нет — ничего считать не надо.

*Задача.* Решить квадратные уравнения:

***х2 − 2x − 3 = 0;***

***15 − 2x – x2 = 0;***

***х2 + 12x + 36 = 0.***

*Первое уравнение:*

***х2 − 2x − 3 = 0*** ⇒ *a = 1; b = −2; c = −3;*

D = (−2)2 − 4 · 1 · (−3) = 16.

D > 0 ⇒ уравнение имеет два корня. Найдем их:

*Второе уравнение:*

***15 − 2x – x2 = 0 ⇒*** *a = −1; b = −2; c = 15;*

D = (−2)2 − 4 · (−1) · 15 = 64.

D > 0 ⇒ уравнение снова имеет два корня. Найдем их:

*Наконец, третье уравнение:*

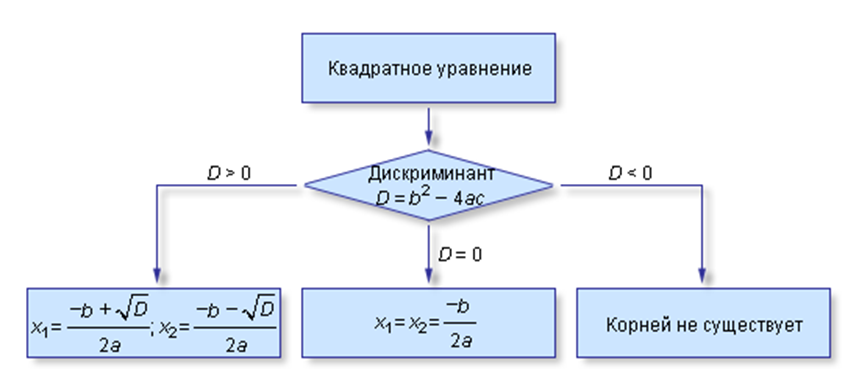
***х2 + 12x + 36 = 0 ⇒*** *a = 1; b = 12; c = 36;*

D = 122 − 4 · 1 · 36 = 0.

D = 0 ⇒ уравнение имеет один корень. Можно использовать любую формулу. Например, первую:

Или запомнить, когда ***D = 0*** ⇒ уравнение имеет один корень:

Как видно из примеров, все очень просто. Если знать формулы и уметь считать, проблем не будет. Чаще всего ошибки возникают при подстановке в формулу отрицательных коэффициентов. Здесь опять же поможет прием, описанный выше: смотрите на формулу буквально, расписывайте каждый шаг — и очень скоро избавитесь от ошибок.



***Способ 2. Решение квадратных уравнений по формуле с четным коэффициентом.***

Если второй коэффициент уравнения *b = 2k* – четное число, то формулу корней можно записать в виде **,**

Решение квадратного уравнения ***а2 + kх + с = 0, а ≠ 0;***

***D1 = k2 – ас.***

Если D1 < 0, то уравнение не имеет корней;

Если ***D1*** = 0, то **;**

Если ***D1*** > 0, то

Формулу удобно использовать, когда *второй коэффициент* — четное число.

Пример:

,

,

**,**

,

,

,

.

**Ответ*: −;* 1*.***

Пример:

***15х2 – 34x + 15 = 0.*** Используя формулу нахождения корней квадратного уравнения, получаем:

;

Решая это уравнение, мы вынуждены проводить вычисления достаточно громоздкие, в отличие от ранее решаемых уравнений.

Для решения квадратных уравнений, у которых второй коэффициент четный, существует другая формула корней, позволяющая упростить вычисления.

**Ответ*: .***

Продемонстрируем применение новой формулы для случая, когда корни уравнения являются иррациональными. Для этого параллельно решаем по разным формулам.

Пример 2:

7у2 – 20у + 14 = 0

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Замечаем, что | |
|  |  |

Ответ:

**Неполные квадратные уравнения**

Бывает, что квадратное уравнение несколько отличается от того, что дано в определении. Например:

* *x*2 + 9*x* = 0;
* *x*2 − 16 = 0.

Несложно заметить, что в этих уравнениях отсутствует одно из слагаемых. Такие квадратные уравнения решаются даже легче, чем стандартные: в них даже не потребуется считать дискриминант. Итак, введем новое понятие:

Уравнение ***ax2 + bx + c = 0*** называется *неполным квадратным уравнением*, если ***b = 0*** или ***c = 0***, т.е. коэффициент при переменной *x* или свободный элемент равен нулю.

Разумеется, возможен совсем тяжелый случай, когда оба этих коэффициента равны нулю: ***b = c = 0***. В этом случае уравнение принимает вид ***ax2 = 0***. Очевидно, такое уравнение имеет единственный корень: *x = 0.*

Рассмотрим остальные случаи. Пусть *b* = 0, тогда получим неполное квадратное уравнение вида *ax*2 + *c* = 0. Немного преобразуем его:

Решение неполного квадратного уравнения

Поскольку арифметический квадратный корень существует только из неотрицательного числа, последнее равенство имеет смысл исключительно при . Вывод:

1. Если в неполном квадратном уравнении вида ***ax2 + c = 0*** выполнено неравенство , корней будет два. Формула дана выше;
2. Если же , корней нет.

Как видите, дискриминант не потребовался — в неполных квадратных уравнениях вообще нет сложных вычислений. На самом деле даже необязательно помнить неравенство . Достаточно выразить величину *x*2 и посмотреть, что стоит с другой стороны от знака равенства. Если там положительное число — корней будет два. Если отрицательное — корней не будет вообще.

Теперь разберемся с уравнениями вида ***ax*2 + *bx* = 0**, в которых свободный элемент равен нулю. Тут все просто: корней всегда будет два. Достаточно разложить многочлен на множители:

*Вынесение общего множителя за скобку*

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Отсюда находятся корни. В заключение разберем несколько таких уравнений:

*Задача*. Решить квадратные уравнения:

1. **x2 − 7x = 0;** ⇒ *x* · (*x* − 7) = 0 ⇒ *x*1 = 0; *x*2 = −(−7)/1 = 7.
2. **5x2 + 30 = 0;** ⇒ 5*x*2 = −30 ⇒ *x*2 = −6. Корней нет, т.к. квадрат не может быть равен отрицательному числу.
3. **4x2 − 9 = 0.** ⇒ 4*x*2 = 9 ⇒ *x*2 = ⇒ *x*1 = = 1,5;  *x*2 = −1,5.

Теорема Виета

В математике существуют специальные приемы, с которыми многие квадратные уравнения решаются очень быстро и без всяких дискриминантов. Более того, при надлежащей тренировке многие начинают решать квадратные уравнения устно, буквально «с первого взгляда».

К сожалению, в современном курсе школьной математики подобные технологии почти не изучаются. А знать надо! И сегодня мы рассмотрим один из таких приемов — теорему Виета. Для начала введем новое определение.

Квадратное уравнение вида ***x*2 + *bx* + *c* = 0** называется ***приведенным***. Обратите внимание: коэффициент при *x*2 равен 1. Никаких других ограничений на коэффициенты не накладывается.

Примеры:

1. *x*2 + 7*x* + 12 = 0 — это приведенное квадратное уравнение;
2. *x*2 − 5*x* + 6 = 0 — тоже приведенное;
3. 2*x*2 − 6*x* + 8 = 0 — а вот это неприведенное, поскольку коэффициент при *x*2 равен 2.

Разумеется, любое квадратное уравнение вида ***ax*2 + *bx* + *c* = 0** можно сделать приведенным — достаточно разделить все коэффициенты на число ***a***. Мы всегда можем так поступить, поскольку из определения квадратного уравнения следует, что *a* ≠ 0.

Правда, далеко не всегда эти преобразования будут полезны для отыскания корней. Чуть ниже мы убедимся, что делать это надо лишь тогда, когда в итоговом приведенном квадратом уравнении все коэффициенты будут целочисленными. А пока рассмотрим простейшие примеры:

Задача. Преобразовать квадратное уравнение в приведенное:

1. 3*x*2 − 12*x* + 18 = 0;
2. −4*x*2 + 32*x* + 16 = 0;
3. 1,5*x*2 + 7,5*x* + 3 = 0;
4. 2*x*2 + 7*x* − 11 = 0.

Разделим каждое уравнение на коэффициент при переменной *x*2. Получим:

1. 3*x*2 − 12*x* + 18 = 0 ⇒ *x*2 − 4*x* + 6 = 0 — разделили все на 3;
2. −4*x*2 + 32*x* + 16 = 0 ⇒ *x*2 − 8*x* − 4 = 0 — разделили на −4;
3. 1,5*x*2 + 7,5*x* + 3 = 0 ⇒ *x*2 + 5*x* + 2 = 0 — разделили на 1,5, все коэффициенты стали целочисленными;
4. 2*x*2 + 7*x* − 11 = 0 ⇒ *x*2 + 3,5*x* − 5,5 = 0 — разделили на 2. При этом возникли дробные коэффициенты.

Как видите, приведенные квадратные уравнения могут иметь целые коэффициенты даже в том случае, когда исходное уравнение содержало дроби.

Теперь сформулируем основную теорему, для которой, собственно, и вводилось понятие приведенного квадратного уравнения:

***Теорема Виета***. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение вида ***x2 + bx + c = 0.*** Предположим, что это уравнение имеет действительные корни ***x*1** и ***x*2**. В этом случае верны следующие утверждения:

1. ***x*1 + *x*2 = −*b***.

Другими словами, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при переменной *x*, взятому с противоположным знаком;

1. ***x*1 · *x*2 = *c***.

Произведение корней квадратного уравнения равно свободному коэффициенту.

Примеры. Для простоты будем рассматривать только приведенные квадратные уравнения, не требующие дополнительных преобразований:

1. *x*2 − 9*x* + 20 = 0 ⇒ ***x*1 + *x*2** = − (−9) = 9; ***x*1 · *x*2** = 20; корни: *x*1 = 4; *x*2 = 5;
2. *x*2 + 2*x* − 15 = 0 ⇒ ***x*1 + *x*2** = −2; ***x*1 · *x*2** = −15; корни: *x*1 = 3; *x*2 = −5;
3. *x*2 + 5*x* + 4 = 0 ⇒ ***x*1 + *x*2** = −5; ***x*1 · *x*2** = 4; корни: *x*1 = −1; *x*2 = −4.

Теорема Виета дает нам дополнительную информацию о корнях квадратного уравнения. На первый взгляд это может показаться сложным, но даже при минимальной тренировке вы научитесь «видеть» корни и буквально угадывать их за считанные секунды.

Задача. Решите квадратное уравнение:

1. *x*2 − 9*x* + 14 = 0;
2. *x*2 − 12*x* + 27 = 0;
3. 3*x*2 + 33*x* + 30 = 0;
4. −7*x*2 + 77*x* − 210 = 0.

Попробуем выписать коэффициенты по теореме Виета и «угадать» корни:

1. *x*2 − 9*x* + 14 = 0 — это приведенное квадратное уравнение.  
   По теореме Виета имеем: *x*1 + *x*2 = −(−9) = 9; *x*1 · *x*2 = 14. Несложно заметить, что корни — числа 2 и 7;
2. *x*2 − 12*x* + 27 = 0 — тоже приведенное.  
   По теореме Виета: *x*1 + *x*2 = −(−12) = 12; *x*1 · *x*2 = 27. Отсюда корни: 3 и 9;
3. 3*x*2 + 33*x* + 30 = 0 — это уравнение не является приведенным. Но мы это сейчас исправим, разделив обе стороны уравнения на коэффициент *a* = 3. Получим: *x*2 + 11*x* + 10 = 0.  
   Решаем по теореме Виета: *x*1 + *x*2 = −11; *x*1 · *x*2 = 10 ⇒ корни: −10 и −1;
4. −7*x*2 + 77*x* − 210 = 0 — снова коэффициент при *x*2 не равен 1, т.е. уравнение не приведенное. Делим все на число *a* = −7. Получим: *x*2 − 11*x* + 30 = 0.  
   По теореме Виета: *x*1 + *x*2 = −(−11) = 11; *x*1 · *x*2 = 30; из этих уравнений легко угадать корни: 5 и 6.

Из приведенных рассуждений видно, как теорема Виета упрощает решение квадратных уравнений. Никаких сложных вычислений, никаких арифметических корней и дробей. И даже дискриминант нам не потребовался.

Разумеется, во всех размышлениях мы исходили из двух важных предположений, которые, вообще говоря, не всегда выполняются в реальных задачах:

1. Квадратное уравнение является приведенным, т.е. коэффициент при *x*2 равен 1;
2. Уравнение имеет два различных корня. С точки зрения алгебры, в этом случае дискриминант *D* > 0 — по сути, мы изначально предполагаем, что это неравенство верно.

Однако в типичных математических задачах эти условия выполняются. Если же в результате вычислений получилось «плохое» квадратное уравнение (коэффициент при *x*2 отличен от 1), это легко исправить — взгляните на примеры в самом начале урока. Про корни вообще молчу: что это за задача, в которой нет ответа? Конечно, корни будут.

Таким образом, общая схема решения квадратных уравнений по теореме Виета выглядит следующим образом:

1. Свести квадратное уравнение к приведенному, если это еще не сделано в условии задачи;
2. Если коэффициенты в приведенном квадратном уравнении получились дробными, решаем через дискриминант. Можно даже вернуться к исходному уравнению, чтобы работать с более «удобными» числами;
3. В случае с целочисленными коэффициентами решаем уравнение по теореме Виета;
4. Если в течение нескольких секунд не получилось угадать корни, то решаем через дискриминант.

Задача. Решите уравнение: **5*x*2 − 35*x* + 50 = 0.**

Итак, перед нами уравнение, которое не является приведенным, т.к. коэффициент *a* = 5. Разделим все на 5, получим: *x*2 − 7*x* + 10 = 0.

Все коэффициенты квадратного уравнения целочисленные — попробуем решить по теореме Виета. Имеем: *x*1 + *x*2 = −(−7) = 7; *x*1 · *x*2 = 10. В данном случае корни угадываются легко — это 2 и 5. Считать через дискриминант не надо.

Задача. Решите уравнение: **−5*x*2 + 8*x* − 2,4 = 0.**

Смотрим: −5*x*2 + 8*x* − 2,4 = 0 — это уравнение не является приведенным, разделим обе стороны на коэффициент *a* = −5. Получим: *x*2 − 1,6*x* + 0,48 = 0 — уравнение с дробными коэффициентами.

Лучше вернуться к исходному уравнению и считать через дискриминант: −5*x*2 + 8*x* − 2,4 = 0 ⇒ *D* = 82 − 4 · (−5) · (−2,4) = 16 ⇒ ... ⇒ *x*1 = 1,2; *x*2 = 0,4.

Задача. Решите уравнение: **2*x*2 + 10*x* − 600 = 0.**

Для начала разделим все на коэффициент *a* = 2. Получится уравнение *x*2 + 5*x* − 300 = 0.

Это приведенное уравнение, по теореме Виета имеем: *x*1 + *x*2 = −5; *x*1 · *x*2 = −300. Угадать корни квадратного уравнения в данном случае затруднительно.

Придется искать корни через дискриминант: *D* = 52 − 4 · 1 · (−300) = 1225 = 352. Если вы не помните корень из дискриминанта, просто отмечу, что 1225 : 25 = 49. Следовательно, 1225 = 25 · 49 = 52 · 72 = 352.

Теперь, когда корень из дискриминанта известен, решить уравнение не составит труда. Получим: *x*1 = 15; *x*2 = −20.

**Следствия из теоремы Виета**

Рассмотрим несколько более «тонких» и неочевидных фактов, которые напрямую следуют из теоремы Виета и дают еще больше информации о корнях квадратного уравнения.

Для начала вспомним стандартную теорему Виета, а затем рассмотрим следствия из нее:

***Теорема Виета.*** Пусть приведенное квадратное уравнение вида ***x*2 + *bx* + *c* = 0** (коэффициент *a* = 1) имеет действительные корни *x*1 и *x*2. Тогда:

1. ***x*1 + *x*2 = −*b*** — сумма корней равна коэффициенту при переменной *x*, взятому с противоположным знаком;
2. ***x*1 · *x*2 = *c*** — произведение корней равно свободному коэффициенту.

***Следствие 1.*** Если в приведенном квадратном уравнении вида ***x*2 + *bx* + *c* = 0** коэффициент *c* > 0, то корни *x*1 и *x*2 имеют одинаковый знак. И наоборот, если коэффициент *c* < 0, корни *x*1 и *x*2 будут разных знаков.

***Следствие 2.*** Если в том же уравнении *x*1 + *x*2 = −*b* > 0 (т.е. сумма корней положительна), то возможны 2 варианта: либо оба корня положительны, либо модуль положительного корня больше модуля отрицательного.

И наоборот, если *x*1 + *x*2 = −*b* < 0 (т.е. сумма корней отрицательна), то опять же есть 2 варианта: либо все корни отрицательны, либо модуль положительного корня меньше модуля отрицательного.

Примеры:

1. *x*2 − 13*x* + 22 = 0. По теореме Виета имеем:  
   *x*1 · *x*2 = 22 > 0 — корни одного знака, поскольку их произведение положительно;  
   *x*1 + *x*2 = −(−13) = 13 > 0 — оба корня положительны, поскольку их сумма положительна;
2. *x*2 + 12*x* + 35 = 0. По теореме Виета имеем:  
   *x*1 · *x*2 = 35 > 0 — корни одного знака, поскольку их произведение положительно;  
   *x*1 + *x*2 = − 12 < 0 — оба корня отрицательны, поскольку их сумма отрицательна;
3. *x*2 − 5*x* − 24 = 0. По теореме Виета имеем:  
   *x*1 · *x*2 = −24 < 0 — корни разных знаков, поскольку их произведение отрицательно;  
   *x*1 + *x*2 = −(−5)= 5 > 0 — модуль положительного корня больше модуля отрицательного, поскольку сумма корней положительна;
4. *x*2 + 4*x* − 5 = 0. По теореме Виета имеем:  
   *x*1 · *x*2 = −5 < 0 — корни разных знаков, поскольку их произведение отрицательно;  
   *x*1 + *x*2 = −4 < 0 — отрицательный корень по модулю больше положительного, поскольку их сумма отрицательна.

Как применять эти факты на практике? Тем, кто только начинает работать по теореме Виета, подобная информация окажется бесполезной и даже избыточной. Но после некоторой практики вы сами начнете замечать, что эти следствия иногда значительно упрощают жизнь и помогают еще точнее «угадывать» корни квадратного уравнения.

Задача. Решите квадратные уравнения:

1. *x*2 − 9*x* + 14 = 0;
2. *x*2 + 8*x* − 15 = 0;
3. *x*2 − 3*x* − 4 = 0;
4. *x*2 + 3*x* + 40 = 0.
5. *x*2 − 9*x* + 14 = 0 ⇒ по теореме Виета: *x*1 + *x*2 = −(−9) = 9; *x*1 · *x*2 = 14. Из второго следует, что корни одного знака. А поскольку их сумма положительна, оба корня положительны. Очевидно, это числа 2 и 7;
6. *x*2 + 8*x* + 15 = 0 ⇒ по теореме Виета: *x*1 + *x*2 = −8; *x*1 · *x*2 = 15. Поскольку 15 > 0, корни снова одного знака. Но поскольку их сумма отрицательна, то все они отрицательны. Например, это числа −3 и −5;
7. *x*2 − 3*x* − 4 = 0 ⇒ по теореме Виета: *x*1 + *x*2 = −(−3) = 3; *x*1 · *x*2 = −4. Итак, произведение отрицательно, поэтому корни разных знаков. Но сумма корней положительна, т.е. модуль положительного корня больше модуля отрицательного. Получаем корни: 4 и −1;
8. *x*2 + 3*x* − 40 = 0 ⇒ по теореме Виета: *x*1 + *x*2 = −3 = 3; *x*1 · *x*2 = −40. Произведение отрицательно — корни разных знаков. Сумма тоже отрицательна — модуль отрицательного корня больше модуля положительного. Корни: 5 и −8.

В дополнение рассмотрим хорошее правило, которое поможет избежать путаницы:

***Решая квадратные уравнения, думайте в первую очередь о знаках корней, а не коэффициентов!***

Например, *x*2 + *x* − 2 = 0 ⇒ по теореме Виета: *x*1 · *x*2 = −2 — произведение корней отрицательно. Кроме того, *x*1 + *x*2 = −1 — сумма корней тоже отрицательна. Корни: *x*1 = 1; *x*2 = −2.

Заметьте: нигде не упоминается слово «коэффициент». В приведенных выше задачах — тоже. Поэтому еще раз: думайте о корнях квадратного уравнения, а не о коэффициентах.

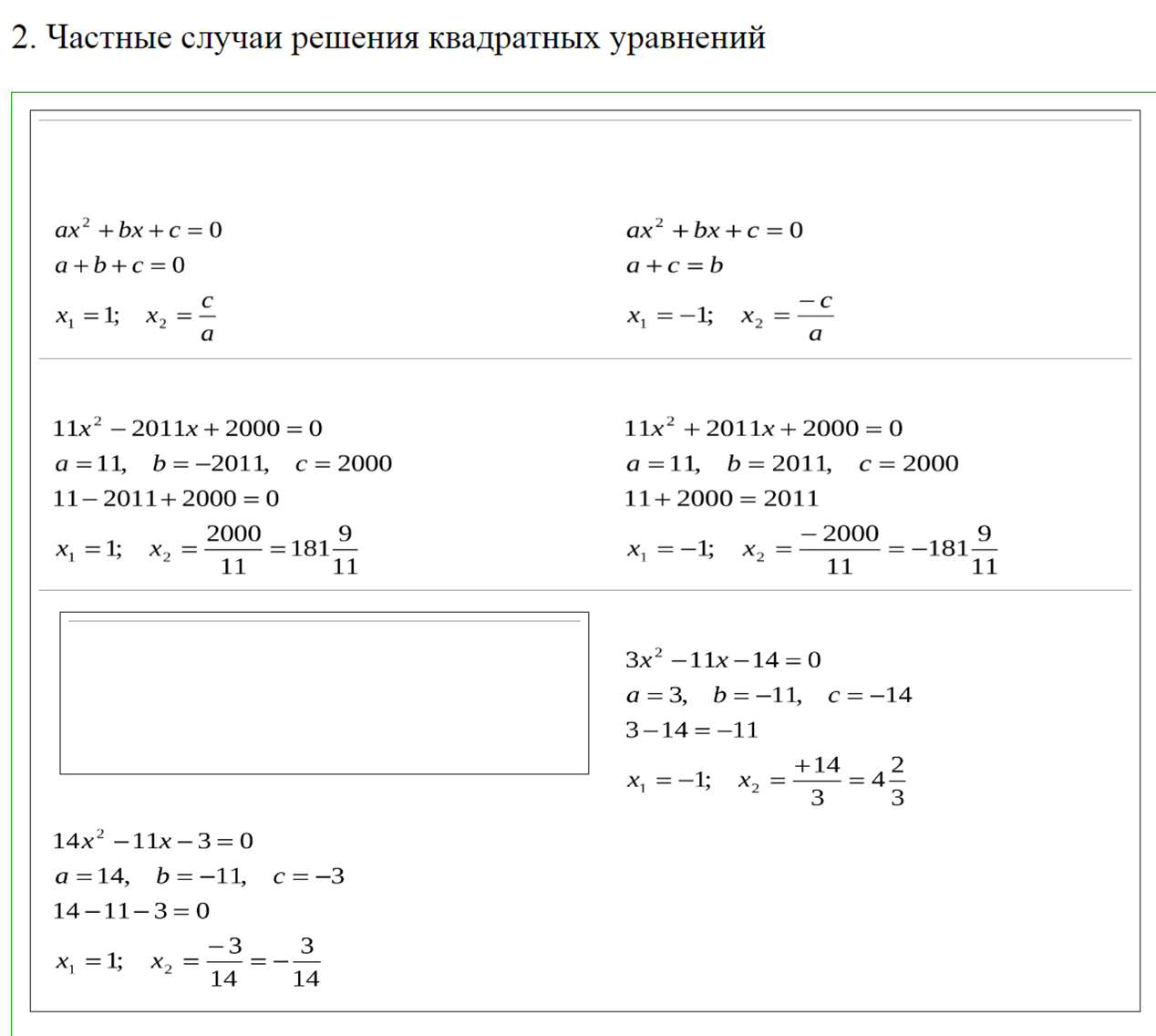
**Свойства коэффициентов квадратного уравнения *ах2 + bх + с = 0***

*Пусть дано квадратное уравнение ах2 + bх + с = 0*

|  |  |
| --- | --- |
| ***1 частный случай*** | ***2 частный случай*** |
| *если* ***a + b + c = 0*** *(т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю),**то* | *если* ***a + c = b*,** *то* |
| *Например:*   1. ***2x2 – 5x + 3 = 0***   *т.к. 2 – 5 + 3 = 0, то*  ***х = 1*** *или* ***х = =.***  *Ответ: 1;*   1. ***132х2 – 247х + 115 = 0.***   *т.к. 132 – 247 + 115 = 0, то*  ***х = 1*** *или* ***х = =.***  *Ответ: 1;* | *Например:*   1. ***7x2 + 8x + 1 = 0***   *т.к. 7 + 1 = 8, то*  ***х = – 1*** *или* ***х = =.***  *Ответ:* ***–****1;*   1. ***11х2+27х+16=0***   *т.к. 11 + 16 = 27, то*  ***х = – 1*** *или* ***х = =.***  *Ответ:* ***–****1;* |

***Проверь себя***

1. *3х2+5х****–****8=0*
2. *5х2****–****7х+2=0*
3. *у2+4у****–****5=0*
4. *11х2****–****25х****–****36=0*
5. *11х2+27х+16=0*
6. *7х2****–****6х****–****1=0*
7. *х2****–****7х****–****8=0*
8. *х2****–****999х+998=0*
9. *2х2+х****–****1=0*
10. *781х2+785х+4=0*
11. *1;* ***–****8/3*
12. *1; 0,4*
13. *1;* ***–****5*
14. ***–****1; 36/11*
15. ***–****1;* ***–****16/11*
16. *1;* ***–****1/7*
17. ***–****1****;*** *8*
18. *1; 998*
19. ***–****1; 1/2*
20. ***–****1;* ***–****4/781*

****

**Способ, основанный на закономерности коэффициентов.**

1. ***Если в уравнении ax² + bx + c = 0, b = (a² + 1)*** *и* ***с = а,*** *то*

*Например:*

*6х² + 37х + 6 = 0 т.к. b = (6² + 1) = 37, то*

*Ответ: -6;*

1. ***Если в уравнении ax² – bx + c = 0, b = (a² + 1)*** *и* ***с = а,*** *то*

*Например:*

*15х²* ***–*** *226х + 15 = 0 т.к. b = (15² + 1) = 226, то*

*Ответ:*

1. ***Если в уравнении ax² + bx – c = 0, b = (a² – 1)*** *и* ***с = – а,*** *то*

*Например:*

*17х² + 288х* ***–*** *17 = 0 т.к. b = (17² - 1) = 228, то*

*Ответ:*

1. ***Если в уравнении ax² – bx – c = 0, b = (a² – 1)*** *и* ***с = – а,*** *то*

*Например:*

*10х²* ***–*** *99х –10 = 0  т.к. b = (10² - 1) = 99, то*

*Ответ: -0,1; 10*

**Сложные квадратные уравнения**

Квадратные уравнения изучаются в 8-м классе, где школьники тренируются на простых (иногда — примитивных) задачах. Но затем, на рубеже 10—11 классов и особенно при изучении высшей математики, квадратные уравнения представляются как нечто само собой разумеющееся. При этом в коэффициентах зачастую возникают такие большие числа, что работать с ними большинство учеников просто не готовы.

Например, попробуйте решить уравнение: *x*2 + 27*x* − 3240 = 0. Корни у него будут вполне нормальными, вот только дискриминант равен *D* = 272 − 4 · 1 · (−3240) = 13689. Ну и какое число надо возвести в квадрат, чтобы получить 13689? С помощью калькулятора все просто: 13689 = 1172. Но как догадаться об этом на экзамене или контрольной работе?

Теорема Виета помогает решать даже такие уравнения. Без всяких корней из пятизначных чисел — схема работы остается прежней. В результате экономится фантастически много времени, ведь многие километровые уравнения оказываются почти устными!

Чтобы почувствовать всю силу теоремы Виета, взгляните на приведенные ниже задачи. Хочу отметить, что это настоящие задачи из ЕГЭ по математике, а не плоды моего больного воображения. Для сравнения попробуйте решить их по старинке, через дискриминант. Разницу почувствуете сразу же.

***Задача.*** Из пункта *А* в пункт *В*, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. За час автомобилист проезжает на 55 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт *В* на 1 час 6 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Это текстовая задача. Пусть скорость велосипедиста равна *x*, тогда скорость автомобилиста равна *x* + 55. Расстояние одно и то же — 30 км, поэтому задача сводится к дробно-рациональному уравнению:

Эта конструкция сводится к простому квадратному уравнению: *x*2 + 55*x* − 1500 = 0. Как видим, коэффициенты получились весьма неслабыми.

Решаем по теореме Виета: ***x*1 + *x*2** = −55; ***x*1 · *x*2** = −1500. Произведение корней отрицательно, значит корни разных знаков. Сумма корней тоже отрицательна, значит отрицательный корень по модулю больше положительного. Несложно угадать эти числа: −75 и 20.

По условию задачи, *x* — это скорость велосипедиста, а скорость не может быть отрицательной. Поэтому нас интересует лишь число 20.

***Задача.*** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получении экспериментально и на исследуемом интервале температур дается выражением *T*(*t*) = *T*0 + *at* + *bt*2, где *T*0 = 800 K, *a* = 52 К/мин, *b* = −0,4 К/мин. Известно, что при температурах нагревателя свыше 2000 К прибор может испортиться, поэтому его надо отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы надо отключать прибор.

Снова текстовая задача. Правда, в этот раз формула нам уже дана. Подставляем числа — получаем квадратное уравнение:

2000 = −0,4*t*2 + 52*t* + 800.

Решаем это уравнение:

2000 = −0,4*t*2 + 52*t* + 800 ⇒ 2000 + 0,4*t*2 − 52*t* − 800 = 0 ⇒ 0,4*t*2 − 52*t* + 1200 = 0 ⇒ *t*2 − 130*t* + 3000 = 0.

Получили приведенное квадратное уравнение. По теореме Виета имеем: ***t*1 + *t*2** = −(−130) = 130; ***t*1 · *t*2** = 3000. Из произведения следует, что корни одного знака. А поскольку их сумма положительна, то оба корня положительны. Если внимательно посмотреть на уравнение, то корни буквально «напрашиваются»: *t*1 = 30; *t*2 = 100.

Итак, температура пересечет 2000−градуснуют отметку через 30 минут и через 100 минут. Очевидно, прибор надо выключить в 30 минут, иначе до 100 минут он просто «не доживет».

Задача. Для одного из предприятий−монополистов зависимость объема спроса на продукцию *q* (единиц в месяц) от ее цены *p* (тыс. руб.) задается формулой: *q* = 75 − 5*p*. Определите максимальный уровень цены *p* (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц *r* = *q* · *p* составит не менее 270 тыс. руб.

Подставляем значения переменных *q* = 75 − 5*p* и *r* = 270 в формулу *r* = *q* · *p*.

Получаем уравнение:

270 = *p*(75 − 5*p*) ⇒ 270 = 75*p* − 5*p*2 ⇒ 5*p*2 − 75*p* + 270 = 0 ⇒ *p*2 − 15*p* + 54 = 0;

В результате несложных преобразований получили приведенное квадратное уравнение. Используем теорему Виета: ***p*1 + *p*2** = −(−15) = 15; ***p*1 · *p*2** = 54.

Произведение положительно — корни одного знака. Сумма положительна — значит, оба корня положительны. А именно: *p*1 = 6; *p*2 = 9.

Поскольку в задаче требуют определить максимальный уровень, выбираем число 9.

**Биквадратные уравнения**

Мы уже научились решать квадратные уравнения. Для этого потребовалось ввести новый математический объект — ***дискриминант***. Если вы не помните, что это такое, рекомендую вернуться « ».

***Биквадратное уравнение*** — это любое выражение, где переменная присутствует только в 4-ой и во 2-ой степени.

Как считать такие биквадратные конструкции? Схема состоит из пяти шагов. Все шаги очень легкие и очень быстрые:

1)вводим новую переменную ***х2=t, t≥0***. В этом случае, возведя обе части этого уравнения в квадрат, мы получим: ***(х2)2=t2; х4=t2***

2)переписываем наше выражение —

3)находим решение для полученного уравнении и находим переменные ***t1*** и ***t2***, если корней будет два.

4)выполняем обратную замену, т. е. вспоминаем, что такое ***t***, получаем две конструкции: ***х2*** = ***t1*** и ***х2*** = ***t2***.

5)решаем полученные уравнения и находим иксы.

*Пример №1:*  
***x4−5x2+6=0***

Делаем замену,  
x2=t, t≥0

t2−5t+6=0  
Получилось ***полное квадратное уравнение***, решаем его через дискриминант:  
D=b2−4ac = (−5)2−4∙1∙6 = 25−24 = 1  
Дискриминант больше нуля, следовательно, два корня, найдем их:

Возвращаемся в замену, подставим вместо переменной ***t*** полученные числа:

*Чтобы решить такого вида уравнение, необходимо обе части уравнения занести под квадратный корень.*

***x2 = 3***  
*x1 =; x2 = −*

***x2 = 2***

*x3 = ; x4 = − .*

Ответ*: −; − ; ;*

**Способ разложения квадратного трёхчлена на множители**

 Итак, вернёмся к квадратному уравнению ***ax2 + bx + c = 0***, где ***а≠0***.

 То, что стоит у нас в левой части, называется ***квадратным трёхчленом***.

***Справедлива теорема*:** Если ***x1; x2***– корни квадратного трёхчлена, то справедливо тождество ***ax2 + bx + c =а(х - x1)( х – x2),*** где ***а*** – старший коэффициент, ***x1; x2*** – корни уравнения.

Итак, мы имеем квадратное уравнение – квадратный трёхчлен, где корни квадратного уравнения также называются корнями квадратного трёхчлена. Поэтому если мы имеем корни квадратного трёхчлена, то этот трёхчлен раскладывается на линейные множители.

**Доказательство верности теоремы на примере**

**Доказательство:**

 Доказательство данного факта выполняется с помощью ***теоремы Виета***.

Давайте вспомним, о чём говорит нам теорема Виета:

Если ***x1; x2***  – корни квадратного трёхчлена, у которого D≥0, то  .

Из данной теоремы вытекает следующее утверждение, что .

Мы видим, что, по теореме Виета,  , т. е., подставив данные значения в формулу выше, мы получаем следующее выражение

, что и требовалось доказать.

Вспомним, что мы доказали теорему, что если ***x1; x2***– корни квадратного трёхчлена, то справедливо разложение .

Теперь давайте вспомним пример квадратного уравнения , к которому с помощью теоремы Виета мы подбирали корни . Из этого факта мы можем получить следующее равенство благодаря доказанной теореме:

Теперь давайте проверим правильность данного факта простым раскрытием скобок:

Видим, что на множители мы разложили верно, и любой трёхчлен, если он имеет корни, может быть разложен по данной теореме на линейные множители по формуле:

.

**Проверка верности теоремы для любого уравнения**

 Однако давайте проверим, для любого ли уравнения возможно такое разложение на множители:

 Возьмём, к примеру, уравнение . Для начала проверим знак дискриминанта , а мы помним, что для выполнения выученной нами теоремы **D** должен быть больше 0, поэтому в данном случае разложение на множители по изученной теореме невозможно.

**Формулировка новой теоремы**

 Поэтому сформулируем новую теорему: если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

 Итак, мы рассмотрели теорему Виета, возможность разложения квадратного трёхчлена на линейные множители, и теперь решим несколько задач.

**Решение задач**

***Задача №1***

 В данной группе мы будем по факту решать задачу, обратную к поставленной. У нас было уравнение, и мы находили его корни, раскладывая на множители. Здесь мы будем действовать наоборот. Допустим, у нас есть корни квадратного уравнения

Обратная задача такова: составьте квадратное уравнение, чтобы ***x1*** и***x2***были его корнями.

*Для решения данной задачи существует 2 способа.*

*Способ 1*

Поскольку   – корни уравнения, то  – это квадратное уравнение, корнями которого являются заданные числа. Теперь раскроем скобки и проверим:

Это был первый способ, по которому мы создали квадратное уравнение с заданными корнями, в котором нет каких-либо других корней, поскольку любое квадратное уравнение имеет не более двух корней.

*Способ 2*

Данный способ предполагает использование обратной теоремы Виета.

Если  – корни уравнения, то они удовлетворяют условию, что  .

Для приведённого квадратного уравнения , , т. е. в данном случае .

Таким образом, мы создали квадратное уравнение , которое имеет заданные корни.

***Задача №2***

Необходимо сократить дробь .

Мы имеем трёхчлен в числителе и трёхчлен в знаменателе, причём трёхчлены могут как раскладываться, так и не раскладываться на множители. Если же и числитель, и знаменатель раскладываются на множители, то среди них могут оказаться равные множители, которые можно сократить.

В первую очередь необходимо разложить на множители числитель .

, т. е. для решения нам необходимы корни ***x1*** и***x2***, для этого нам необходимо решить соответствующее квадратное уравнение:

Для решения используем II частный случай:

Таким образом, мы нашли оба корня квадратного уравнения и можем подставить их значения в исходное уравнение, чтобы разложить его на множители:

Вспомним изначальную задачу, нам необходимо было сократить дробь .

Попробуем решить поставленную задачу, подставив вместо числителя .

, необходимо не забыть, что при этом знаменатель не может равняться 0, т. е.  .

Если данные условия будут выполняться, то мы сократили исходную дробь до вида .

***Задача №3***

Решим уравнение ***х2 + 10х - 24 = 0***. Разложим левую часть на множители (***способом группировки***):

*х2 + 10х - 24 = х2 + 12х - 2х - 24 = х(х + 12) - 2(х + 12) = (х + 12)(х - 2).*

Следовательно, уравнение можно переписать так:

***(х + 12)(х - 2) = 0***

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при х = 2, а также при х = –12. Это означает, что число ***2*** и ***–12*** являются корнями уравнения ***х2 + 10х - 24 = 0.***

***Задача №4*** (задача с параметром)

При каких значениях параметра сумма корней квадратного уравнения

равна 0?

Если корни данного уравнения существуют, то , вопрос: когда .

Для того чтобы найти значения p, нам необходимо решить следующее уравнение .

Попробуем сразу подобрать первый корень уравнения по теореме Виета: , отсюда видно, что .

Мы определили, что  или , поэтому эти числа становятся для нас подозрительными, т. е. теми, что могут удовлетворять нашему условию.

Проверим, что  подходит для нас, поскольку , такая система может существовать, поэтому из второго уравнения получаем следующее: .

Таким же образом проверим   , где мы сразу видим, что  не имеет корней, таким образом даём ответ на поставленный вопрос:

При значении параметра , сумма корней квадратного уравнения равна 0.

**Список литературы**

1. Башмаков М.И. Алгебра 8 класс. – М.: Просвещение, 2004.
2. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Алгебра 8. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010.
3. Никольский С.М., Потапов М.А., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2006.

**Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет**

1. Вся элементарная математика ([Источник](http://www.bymath.net/studyguide/alg/sec/alg23.html)).
2. Портал Естественных Наук ([Источник](http://e-science.ru/math/theory/?t=79)).
3. Интернет-портал аКак? ([Источник](http://akak.ru/recipes/13858-kak-razlozhit-kvadratnyiy-trehchlen-na-mnozhiteli)).